

# Sur le centralisateur d'une involution de ${}^2E_6(2)$ .

Marguerite-Marie Virotte-Ducharme

Équipe des groupes finis, UMR 7586; Institut de Mathématiques  
175, rue du Chevaleret; 75013 Paris France.

2 février 2008

## Résumé

On établit que le groupe  $2^{20+1}.U_6(2)$ , centralisateur dans  ${}^2E_6(2)$  d'une involution de la classe  $2A$ , est un quotient du groupe de Coxeter défini via le diagramme  $Q_{222}$ . Cela répond à un problème laissé ouvert dans la détermination des  $Q$ -groupes.

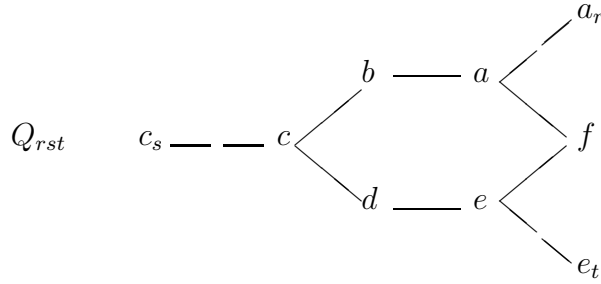
## Abstract

In this paper we prove that  $2^{20+1}.U_6(2)$ , known as the centralizer of an involution in the group  ${}^2E_6(2)$  is a quotient of a Coxeter group. We obtain a presentation of  $2^{20+1}.U_6(2)$  as a  $Q_{222}$ -group, which now resolve a long pending question.

## 1 Introduction

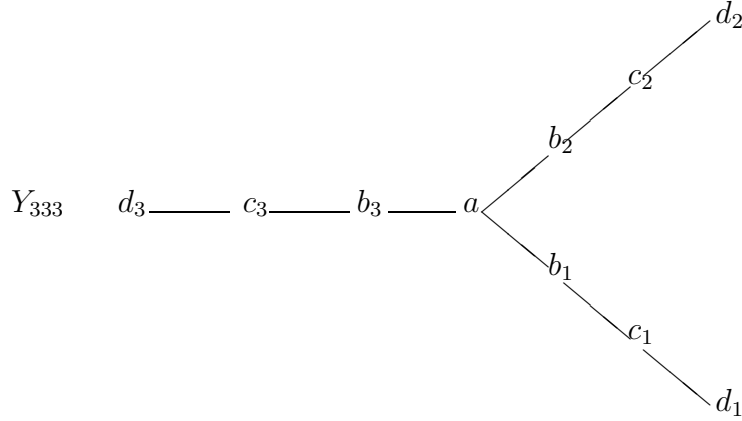
### 1.1 Motivation et résultats

Rappelons qu'un groupe de Coxeter est engendré par un ensemble d'involutions correspondant aux sommets d'un graphe  $X$  (graphe de Coxeter) tel que si  $x$  et  $y$  sont des éléments distincts dans  $X$  leur produit est d'ordre 3 s'ils sont joints par une arête et d'ordre 2 dans le cas contraire. On appelle  $Q$ -groupe un quotient du groupe de Coxeter défini par un graphe de Coxeter  $Q_{rst}$  ( $1 \leq r, s, t \leq 4$ ) où  $Q_{111}$  est un hexagone muni de trois bras notés  $a = a_1, a' = a_2, \dots, a_r, c = c_1, c' = c_2, \dots, c_s, e = e_1, e' = e_2, \dots, e_t$  :



Les groupes  $3^5 \rtimes S_6$ ,  $2.O_6^-(3) : 2$  et  $U_6(2)$  sont des  $Q$ -groupes définis à partir de  $Q_{111}$ ,  $Q_{211}$  et  $Q_{221}$  ; on en rappelle des présentations en annexe (voir aussi l'ATLAS [2]).

Dans un article déjà ancien [11] L. H. Soicher établit que le groupe  $E = 2^{3,2}E_6(2)$  est le quotient par la relation  $S = 1$  du groupe de Coxeter défini par :

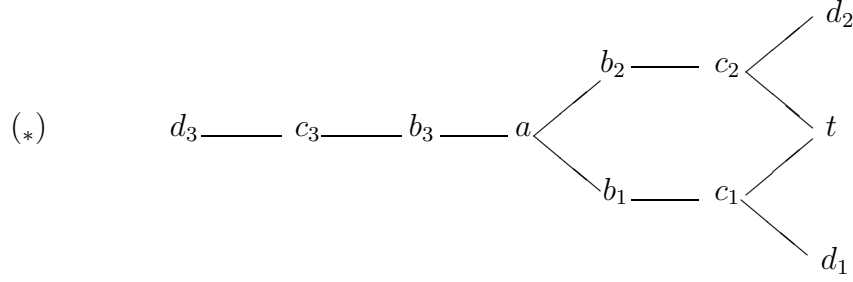


avec  $S = (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10}$  ; le groupe  $E$  admet donc la présentation

$$E = (a, b_i, c_i, d_i (1 \leq i \leq 3) / Y_{333}, S = 1)$$

et son centre est  $\langle f_{12}, f_{23}, f_{31} \rangle$  où  $f_{ij} = (ab_i b_j b_k c_i c_j d_i)^9$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  (notation de l'ATLAS [2]).

L. H. Soicher met en évidence un élément  $t$  de  $E$  satisfaisant à



et à la relation hexagonale :  $V = 1$  avec  $V = (atb_2c_1c_2b_1)^4$ .

Le centralisateur de  $d_3$  dans  $E$  contient donc des éléments satisfaisant aux relations de graphe  $Q_{222}$  obtenu à partir de (\*) en omettant  $d_3$  et  $c_3$ .

On connaît la structure du centralisateur d'une involution  $d$  de  $E$  provenant de la classe  $2A$  dans  $\bar{E} = E/Z(E)$  :  $C_E(d) \simeq 2^4.2^{20}.U_6(2)$  et  $C_{\bar{E}}(\bar{d}) \simeq 2^{20+1}.U_6(2)$ ,  $\bar{d}$  désignant l'image de  $d$  dans  $\bar{E}$  ([2], [6], [9], [12]).

Dans [11] L. H. Soicher ne donne pas de présentation de  $C_E(d)$ , mais conjecture, comme dans l'ATLAS ([2], [10]) que  $C_E(d)$  est un quotient du groupe défini par  $Q_{222}$  et  $V = 1$ .

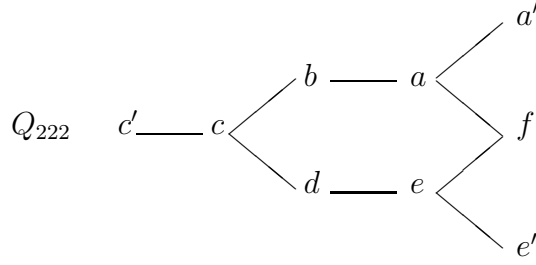
L'objet de ce travail est de décrire un jeu de relations noté  $rel(i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) (avec  $rel(1) \Rightarrow rel(2) \Rightarrow rel(3)$ ) suffisant pour définir les groupes  $2^{20+1}.U_6(2)$ ,  $2^4.2^{20}.U_6(2)$  et un troisième groupe  $2^2.2^4.2^{20}.U_6(2)$ .

On se propose d'établir le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit  $G$  un groupe avec la présentation :*

$$G = (a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(i)) (1 \leq i \leq 3)$$

où



$$V = (adbecf)^4 \quad (\text{relation hexagonale})$$

$$rel(i) \quad (\text{voir ci-après}),$$

et soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $a, b, \dots, f, a', c'$ .

Pour  $i = 1$ , le groupe  $G$  est isomorphe au centralisateur d'une involution de la classe  $2A$  de  ${}^2E_6(2)$  : on a  $G \simeq 2^{20+1}.U_6(2)$  et  $H$  est isomorphe à  $2.U_6(2)$ .

Pour  $i = 2$ , le groupe  $G$  est isomorphe à  $2^4.2^{20}.U_6(2)$  et  $H$  à  $2.2.U_6(2)$ .

Pour  $i = 3$ , le groupe  $G$  est isomorphe à  $2^2.2^4.2^{20}.U_6(2)$  et  $H$  à  $2^2.2.U_6(2)$ .

Notations :

- $rel(1) = \{r = 1, z_1 = z_2 = z_3 = 1, m_a = m_e = 1\}$ ,
- $rel(2) = \{r = 1, \mathcal{R} = 1, m_a = m_e = 1\}$ ,
- $rel(3) = \{r = 1, \mathcal{R} = 1\}$ ,
- $r = (\mathcal{C}^{ee'de}\mathcal{A})^4$  avec  $\mathcal{C} = c^{c'dbc}$  et  $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$ ,
- $\mathcal{R} = (\mathcal{C}^{ee'de}.\mathcal{C}^{aa'ba})^2$ ,
- $z_1 = (cc'bdaee')^9$ ,
- $z_2 = (cc'bdeaa')^9$ ,
- $z_3 = (ee'dfcaa')^9$ ,
- $m_a = (aa'fbcd)^5$ ,
- $m_e = (ee'dfab)^5$ .

## 1.2 Méthodes et Plan

Notons  $E$  un groupe isomorphe à  $2^3.{}^2E_6(2)$  et  $G$  un groupe satisfaisant aux conditions du théorème dans le cas  $i = 3$ .

Le travail comporte quatre parties : des résultats préliminaires, la construction d'un certain sous-groupe  $N$ , la démonstration proprement dite du théorème enfin des tables et une annexe.

### 1.2.1 Les résultats préliminaires

D'abord on donne quelques compléments sur les éléments intervenant dans les relations  $rel(i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ). Puis on vérifie que les relations qui déterminent  $G$  sont satisfaites dans  $E$  de sorte que l'on a un morphisme  $\Phi$  de  $G$  dans  $E$ ;  $\Phi(G)$  est un sous-groupe de  $E$  centralisé par une involution du système générateur de  $E$ .

### 1.2.2 Le sous-groupe $N$

Sa construction est une partie essentielle de la démonstration. En remplaçant le générateur  $e'$  par un de ses conjugués  $a^o$  dans  $G$ , on obtient un nouveau système générateur de  $G$  et on montre, grâce à la relation  $R = 1$ , que  $a'a^o$  est d'ordre 2. La fermeture normale de  $a'a^o$  dans  $G$  est alors le sous-groupe  $N$  en question. Pour construire  $N$ , on détermine des conjugués de  $a'a^o$  de manière à obtenir un système générateur  $\Gamma$  de  $N$ . Les calculs sont longs et fastidieux, ils ne sont pas reproduits ici; certains sont rassemblés sous forme de tables : table des conjugués  $\gamma^y, \gamma \in \Gamma, y \in \{a, b, \dots, f, a', c'\}$ , table des commutateurs des éléments de  $\Gamma$  .... On détermine l'ordre de  $N$ , ses éléments centraux et son groupe des commutateurs.

### 1.2.3 La preuve du théorème

Dans chacune des situations  $i = 1, 2, 3$ , on détermine les éléments centraux de  $G$  et donc l'ordre de  $Z(G)$ . On établit les résultats concernant le sous-groupe  $H$  (du théorème) puis on vérifie que  $G/Z(G).N$  est isomorphe à  $U_6(2)$ ; enfin on conclut que l'image de  $G$  dans  $E$  est bien le centralisateur d'une certaine involution de  $E$ .

### 1.2.4 Tables. Annexe

Pour faciliter la lecture, nous avons choisi de ne pas donner les détails des démonstrations. Nous donnons sous forme de tables des résultats concernant le groupe  $N$  (1.2.2). En annexe nous avons rassemblé des compléments utiles à la clarté du texte. En général ces résultats sont connus ou se démontrent sans difficultés; ils concernent les groupes  $3^5 \rtimes S_6$ ,  $2.O_6^-(3)$ ,  $W(E_7)$  et  $U_6(2)$ , groupes qui admettent des présentations via les graphes de Coxeter  $Q_{111}$ ,  $Q_{211}$ ,  $Y_{321}$  et  $Q_{222}$ .

## 2 Préliminaires

Dans cette section  $E$  et  $G$  désignent respectivement des groupes donnés avec leur présentation :

$$E = (a, b_i, c_i, d_i(1 \leq i \leq 3)/Y_{333}, S = 1)$$

$$G = (a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(3)).$$

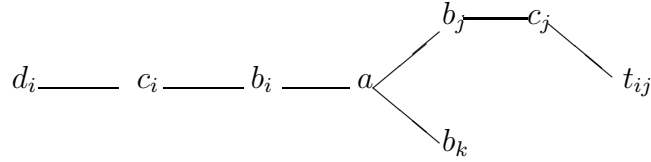
## 2.1 Résultats concernant le groupe $E$

### 2.1.1 Les éléments $f_{ij}$

Pour  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , on note  $W_{ij}$  le sous-groupe de  $E$

$$W_{ij} = \langle a, b_i, c_i, d_i, b_j, c_j, b_k \rangle;$$

$W_{ij}$  est centralisé par  $d_k$  et admet un élément supplémentaire  $t_{ij}$  tel que :

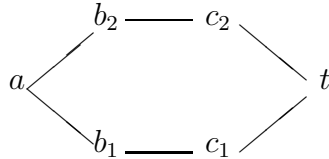


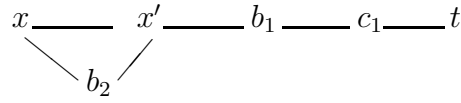
Rappelons que  $W_{ij}$  et  $W_{ik}$  engendrent un sous-groupe  $O_i$  de  $E$  isomorphe à  $O_7(3) \times 2$  dont l'involution centrale est  $f_{ij} = f_{ik}$  ( $f_{ij} = (ab_i b_j b_k c_i c_j d_i)^9$ ) (notations de l'ATLAS) et que la relation  $S = 1$  impose  $t_{ij} = t_{ik}$  ([2], [3], [11], [16]).

On désigne par  $t$  l'élément  $t_{31} = t_{32}$  et par  $f_i$  l'involution  $f_{ij} = f_{ik}$ ;  $f_i$  est centrale dans  $E$  et l'on a  $Z(E) = \langle f_{12}, f_{23}, f_{31} \rangle$  ([11]). En outre on a  $f_3 = d_3 m$  avec  $m = (ab_1 b_2 b_3 c_2 t)^5$  (voir Annexe 3).

### 2.1.2 La relation hexagonale

Soit  $H_0$  le sous-groupe de  $E$  engendré par  $a, b_1, c_1, t, b_2, c_2$ ; ces éléments satisfont aux relations ci-dessous :





où  $x = a^{b_1 c_1 t c_2}$  et  $x' = b_1^{c_1 t c_2}$ .

La relation  $S = 1$  impose que le sous-groupe  $H_0$  soit isomorphe à  $H_{3,6}$  ou à  $H_{3,6}/Z(H_{3,6})$  (voir l'Annexe 1). Or  $H_0$  est contenu dans  $O_i$  ( $O_i \simeq O_7(3) \times 2$ ) et son centre  $Z(H_0)$  (qui est un 3-groupe) est central dans  $O_i$ , il s'ensuit que  $Z(H_0) = 1$ ; on a alors  $(atb_1 c_2 c_1 b_2)^4 = 1$  (relation hexagonale) (Annexe 1, [8], [16], [18]).

## 2.2 Résultats concernant le groupe $G$

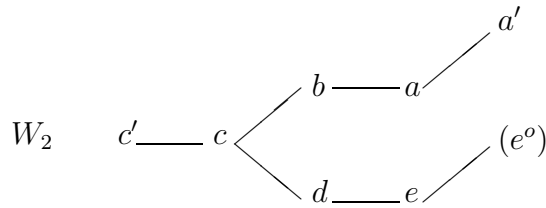
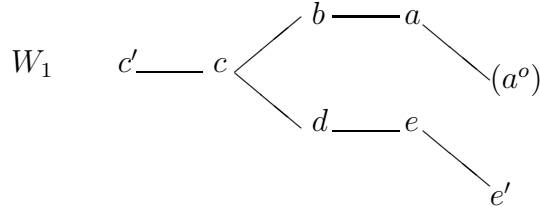
### 2.2.1 Notations

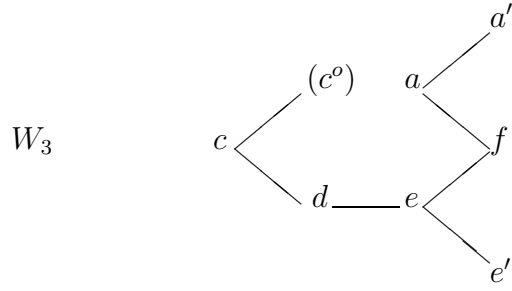
On pose  $\mathcal{A} = a^{a' b f a}$ ,  $\mathcal{C} = c^{c' d b c}$  et  $\mathcal{E} = e^{e' d f e}$ ; la relation  $V = 1$  impose que  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{E}$  commutent deux à deux et que l'on a :

$$\mathcal{A}^{e d f e} = \mathcal{A}^{c b d c}, \mathcal{C}^{a b f a} = \mathcal{C}^{e d f e}, \mathcal{E}^{c b d c} = \mathcal{E}^{a b f a}.$$

### 2.2.2 Les éléments $z_i$ ( $1 \leq i \leq 3$ )

Ils désignent les involutions centrales des groupes  $W_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) isomorphes à  $W(E_7)$  définis respectivement à partir de :





On note  $a^o, e^o, c^o$  les involutions qui permettent d'obtenir les diagrammes complétés. On a  $a^o = \mathcal{C}^{abedcc'e'edcba}$  et  $e' = \mathcal{C}^{abedcc'a^oabcde}$ . Les éléments centraux  $z_i$  s'écrivent comme produit de sept involutions commutant deux à deux ; (avec les notations 2.2.1) on a :

- $z_1 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{ee'de}a^oe' = (cc'bdaee')^9$
- $z_2 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{aa'ba}e^oa' = (cc'bdeaa')^9$
- $z_3 = e'df\mathcal{E}\mathcal{E}^{aa'fa}c^oa' = (ee'dfcaa')^9$ .

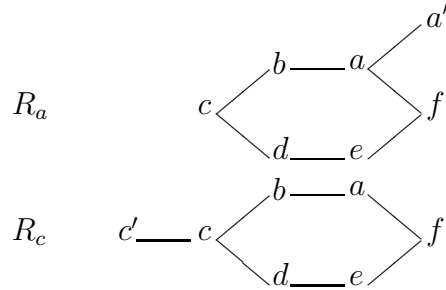
(voir aussi annexe 3).

### 2.2.3 La relation $R = 1$

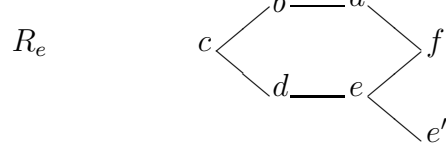
Les relations  $R = 1$  et  $(a'a^o)^2 = 1$  sont équivalentes. On a  $R = 1$  si et seulement si l'un des  $z_i$  est dans  $Z(G)$ . Sous l'hypothèse  $R = 1$ , les éléments  $z_1, z_2$  et  $z_3$  sont centraux dans  $G$ .

### 2.2.4 Les éléments $m_a$ et $m_e$

On désigne par  $R_a, R_c$  et  $R_e$  les sous-groupes de  $G$  respectivement définis à partir de :







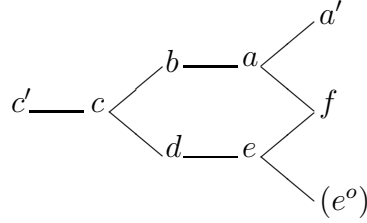
Pour chacun d'entre eux la relation hexagonale est satisfaite.

Ces groupes sont isomorphes à  $2.O_6^-(3) : 2$ , leur involution centrale est un produit de six involutions commutant deux à deux, on la note respectivement :

- $m_a = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc} = (aa'fbcd)^5$
  - $m_c = c'bdf\mathcal{C}\mathcal{C}^{edfe} = (cc'bdef)^5$
  - $m_e = e'dfb\mathcal{E}\mathcal{E}^{abfa} = (ee'dfab)^5$
- (voir Annexe 3).

### 2.2.5 Le sous-groupe $K_e$

Soit  $K_e$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $a, b, c, d, e, f, a', c'$  ;  $K_e$  est isomorphe à  $2^2.2.U_6(2)$  et l'on a  $Z(K_e) = \langle m_a, m_c \rangle \cdot \langle m_e z_2 \rangle$  (2.2.2, 2.2.3). Soit  $e^o$  l'unique élément de  $K_e$  tel que l'on ait :



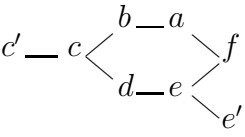
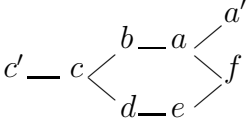
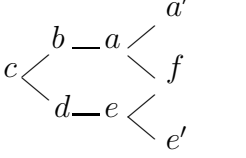
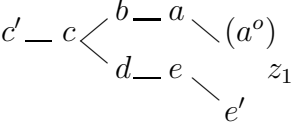
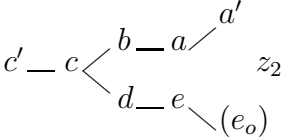
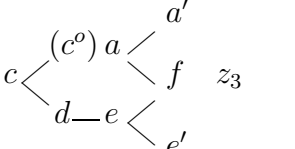
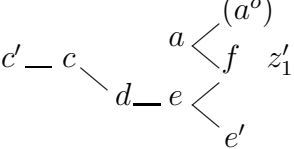
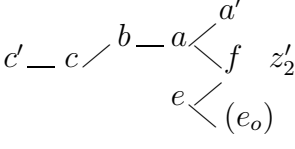
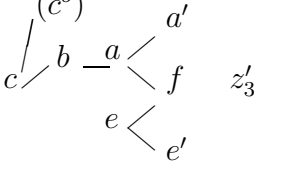
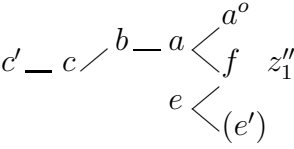
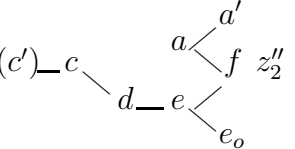
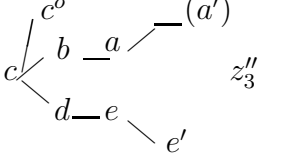
On a alors  $m_a m_c = n_e$  où  $n_e$  est l'involution centrale du sous-groupe  $\langle b, c, d, e, f, e^o \rangle$  (voir Annexe 4). On a des résultats similaires pour les sous-groupes  $K_a = \langle a, b, c, d, e, f, c', e' \rangle$  et  $K_c = \langle a, b, c, d, e, f, a', e' \rangle$  (voir le tableau 2.2.6).

### 2.2.6 Un grand tableau

(Avec les notations ci-dessus). Pour chacun des groupes  $K$  ( $K = K_a, K_c, K_e$ ), le tableau ci-dessous indique un système générateur de  $K$  et de trois sous-groupes  $W$  isomorphes à  $W(E_7)$ ,  $W/Z(W)$  étant un représentant de chacune des trois classes de  $W^*(E_7)$  de  $K/Z(K)$  ([13], [14]). Pour chaque groupe, on précise les éléments centraux (tableau voir page suivante).

### 2.2.7 Les éléments $m_a$ , $m_c$ et $m_e$

Les éléments  $m_a$ ,  $m_c$  et  $m_e$  sont centraux dans  $G$ . En effet  $m_a$  et  $m_c$  (resp.  $m_c$  et  $m_e$ ) appartiennent à  $Z(K_e)$  (resp.  $Z(K_a)$ ) et ils centralisent  $e'$  (resp.  $a'$ ). (2.2.4, 2.2.5).

	$K_a$	$K_e$	$K_c$
Système générateur de $K$			
Système générateur de $W$ , involution centrale			
			
			
	$z_1 = (cc'bdaee')^9$ $z'_1 = (ee'dfacc')^9$ $z''_1 = (aa^°bfec'c')^9$	$z_2 = (cc'bdeaa')^9$ $z'_2 = (aa'bfec'c')^9$ $z''_2 = (ee^°dfacc')^9$	$z_3 = (ee'dfcaa')^9$ $z'_3 = (aa'bfcee')^9$ $z''_3 = (cc^°bdaee')^9$
$Z(K)$	$\langle m_c, m_e \rangle . \langle m_c z_1 \rangle$	$\langle m_c, m_a \rangle . \langle m_c z_2 \rangle$	$\langle m_e, m_a \rangle . \langle m_e z_3 \rangle$
	$m_c m_e = n_a$	$m_c m_a = n_e$	$m_a m_e = n_c$
	$m_c z_1 = m_e z'_1 = n_a z''_1$	$m_c z_2 = m_a z'_2 = n_e z''_2$	$m_e z_3 = m_a z'_3 = n_c z''_3$

## 2.3 Lien entre $E$ et $G$

On note  $\Phi$  la correspondance entre les générateurs de  $G$  et des éléments de  $C_E(d_3)$  définie de la manière suivante :

$$G : \begin{array}{c} c' - c \begin{cases} b - a \begin{cases} a' \\ f \end{cases} \\ d - e \begin{cases} f \\ e' \end{cases} \end{cases} \end{array} \qquad E : d_3 - c_3 - b_3 - a \begin{cases} b_2 - c_2 \begin{cases} d_2 \\ t \end{cases} \\ b_1 - c_1 \begin{cases} t \\ d_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} a \rightarrow c_2 & d \rightarrow b_1 & a' \rightarrow d_2 \\ b \rightarrow b_2 & e \rightarrow c_1 & c' \rightarrow b_3 \\ c \rightarrow a & f \rightarrow t & e' \rightarrow d_1 \end{array}$$

On note  $D$  le sous-groupe de  $E$  engendré par les éléments  $\Phi(a)$ ,  $\Phi(b)$ , ....

### 2.3.1 Hexagonale

La relation hexagonale est satisfaite par les images des générateurs de  $G$ . (2.1.2)

### 2.3.2 Éléments centraux de $E$

Les éléments  $\Phi(z_1)$  et  $\Phi(z_2)$  écrits comme produits des éléments  $\Phi(c) \dots$  sont les éléments centraux  $f_1$  et  $f_2$  de  $E$ . On vérifie que  $\Phi(z_3)$  est central dans  $E$ . Ainsi la relation  $\mathcal{R}$  est satisfaite dans  $E$ .

Les éléments  $\Phi(m_a)$  et  $\Phi(m_e)$  sont centraux dans  $E$ , ils n'appartiennent pas à l'ensemble  $Z(E) - \{1\}$  : on a donc  $\Phi(m_a) = \Phi(m_e) = 1$ .

Enfin on a  $\Phi(m_c) = m$  (notation 2.1) ; c'est un élément de  $Z(D)$  qui n'est pas dans  $Z(E)$ .

### 2.3.3 La relation $r = 1$

Les éléments  $\mathcal{C}^{ee'de}$  et  $\mathcal{A}$  correspondent par  $\Phi$  à  $x = a^{b_1 b_2 b_3 a.c_1 d_1 b_1 c_1}$  et  $y = c_2^{d_2 b_2 t c_2}$  ; la relation  $r = 1$ ,  $(\mathcal{C}^{ee'de} \mathcal{A})^4 = 1$ , s'écrit donc dans  $E$   $(xy)^4 = 1$ . Rappelons que  $E$  est un groupe de  $\{3, 4\}$ -transpositions ([2], [6]), l'ordre du produit de deux transpositions distinctes est donc 2, 3, 4. Or on sait que  $C_E(d_3)/O_2(C_E(d_3))$  est isomorphe à  $U_6(2)$ , groupe dans lequel l'image de  $xy$  n'est pas d'ordre 3 ; on a  $(xy)^4 = 1$ , la relation  $r = 1$  est satisfaite dans  $E$ .

### 2.3.4 En conclusion

De ce qui précède, il résulte que  $\Phi$  induit un morphisme de  $G$  dans  $E$  dont l'image  $D$  est un sous-groupe du centralisateur de  $d_3$  dans  $E$ .

## 3 Le sous-groupe $N$

Dans cette section  $G$  désigne un groupe satisfaisant aux hypothèses du théorème avec les relations  $rel(3)$ . Les notations sont celles introduites en 2.2.1.

L'objet de cette section est l'étude de la fermeture normale  $N$  dans  $G$  de  $\alpha_{a'} = a'a^o$ ,  $\alpha_{a'}$  est un élément d'ordre 2 (voir 2.2.2). On détermine un système générateur de  $N$  de cardinal 22, on établit que le groupe des commutateurs de  $N$  est d'ordre 2 et que le centre de  $N$  est abélien élémentaire d'ordre 8 et que l'on a  $\mathcal{D}(N) \subset Z(N) \subset Z(G)$ . Enfin, on vérifie que  $N$  est d'ordre  $2^{23}$ .

On pose  $Y = \{a, b, \dots, f, a', c'\}$ ;  $Y \cup \{e'\}$  et  $Y \cup \{a^o\}$  sont des systèmes générateurs de  $G$ .

### 3.1 Les éléments $\alpha_y$ et $\beta_y$ , $y \in Y$

#### 3.1.1

L'élément  $\alpha_{a'}$  et certains de ses conjugués dans  $G$  appartiennent au sous-groupe  $W_{12} = \langle W_1, W_2 \rangle$  (notations 2.2.2); la fermeture normale de  $\alpha_{a'}$  dans  $W_{12}$  est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre  $2^7$  contenant  $z_1 z_2$  (voir l'Annexe 3) et est engendré par les éléments  $\alpha_{a'}$ ,  $\alpha_a = \alpha_{a'}^{aa'}$ ,  $\alpha_b = \alpha_a^{ba}$ ,  $\alpha_c = \alpha_b^{cb}$ ,  $\alpha_{c'} = \alpha_c^{c'c}$ ,  $\alpha_d = \alpha_c^{dc}$ ,  $\alpha_e = \alpha_d^{ed}$  et l'on a  $\alpha_{a'} \alpha_b \alpha_{c'} = z_1 z_2$  (voir aussi [18]).

On pose  $\alpha_f = \alpha_e^{fe}$  et  $y_1 = y\alpha_y$  pour  $y$  dans  $Y$ ; on vérifie que les produits  $yy'$  et  $y_1 y'_1$  ont le même ordre pour  $y$  et  $y'$  dans  $Y - \{f\}$ . On calcule les ordres de  $y f_1$  et  $f y_1$  ( $y$  dans  $Y$ ), voir la table T.1.

#### 3.1.2

On observe que  $f_1^{af} = a_1^{bcv^2cb}$  avec  $v = adbecf$ ; puisque  $v^4 = V = 1$ , on a  $a_1 = a_1^{bcv^2cb, bcv^2cb} = f_1^{afbacbdcedf eaf}$ . On pose  $\beta_a = \alpha_f^{af}$ , on définit successivement  $\beta_{a'} = \beta_a^{a'a}$ ,  $\beta_b = \beta_a^{ba}$ ,  $\beta_c = \beta_b^{cb}$ ,  $\beta_{c'} = \beta_c^{c'c}$ ,  $\beta_d = \beta_c^{dc}$ ,  $\beta_e = \beta_d^{ed}$ ,  $\beta_f = \beta_e^{fe}$ . On a alors  $\beta_f^{af} = \alpha_a$  d'où  $\beta_f^a = \beta_f \alpha_a = \alpha_a \beta_f = \alpha_a^f$  et  $\alpha_f^a = \alpha_f \beta_a = \beta_a \alpha_f = \beta_a^f$ . Pour  $y$  dans  $Y$ , on pose  $y_2 = y\beta_y$ .

#### 3.1.3

On a ainsi déterminé 16 éléments de  $N$ ; la table T.1 donne l'ordre des produits suivants :  $yy'_1$ ,  $yy'_2$ ,  $y_2 y'_1$ ,  $y_2 y'_2$  et  $y_1 y'_1$  pour  $y$  et  $y'$  dans  $Y$  (où  $yy_1$  et  $yy_2$  désignent

les involutions  $\alpha_y$  et  $\beta_y$ ).

## 3.2 Les éléments $x_a, x_{a'}, x_b, x_f$

### 3.2.1

Soit  $B$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $a, a', b, f$  et  $a^\circ$ . Posons  $L_a = a^{a'bf a^\circ} a$ ,  $L_{a'} = L_a^{a'a}$ ,  $L_b = L_a^{ba}$ ,  $L_f = L_a^{fa}$  et  $L_{a^\circ} = L_a^{a^\circ a}$ . Ces éléments sont d'ordre 4 (relation  $r = 1$ ) ; on désigne par  $x_a, x_{a'}, x_b, x_f$  et  $x_{a^\circ}$  leur carré respectif. Il est facile de voir que ces éléments commutent entre eux et que l'on a  $x_a x_{a'} x_b x_f x_{a^\circ} = 1$  ([8], [18], [19]).

On observe que  $x_f = (b_1 f)^2 = \alpha_b^f \alpha_b = \alpha_b \alpha_b^f$  et  $x_b = (f_2 b)^2 = \beta_f^b \beta_f = \beta_f \beta_f^b$  ; ainsi les éléments  $x_a, x_{a'}, x_b, x_f$  sont dans  $N$  et l'on a  $\alpha_b^f = \alpha_b x_f$  et  $\beta_f^b = \beta_f x_b$ .

### 3.2.2

Des égalités  $\alpha_a = \alpha_b^{ab} = \beta_f^{af}$ ,  $\beta_c = \beta_b^{cb} = \beta_d^{cd}$  et  $\alpha_e = \alpha_d^{ed} = \alpha_f^{ef}$  il vient :  $\beta_f^b = \alpha_b \beta_f \alpha_b^f$ ,  $\beta_d^b = \beta_b \beta_d \beta_b^d$ ,  $\alpha_d^f = \alpha_d \alpha_f \alpha_d^f$  ; de la première égalité on tire :  $\beta_f \beta_f^b = \beta_f (\alpha_b \beta_f) \alpha_b \alpha_b^f$  d'où  $x_b = [\beta_f, \alpha_b] x_f$ . Ainsi  $x_f x_b$  est un élément de  $\mathcal{D}(N)$ .

### 3.2.3

De l'égalité  $\alpha_{a'} \alpha_b \alpha_{c'} = z_1 z_2$  (3.1.1) il résulte que  $\alpha_{a'} \alpha_b \alpha_{c'}$  commute à  $f$ , on a donc  $\alpha_{c'}^f = \alpha_{c'} x_f$  (car  $x_f$  commute avec  $\alpha_{a'}$  et  $\alpha_b$ ). On en déduit en outre que  $\beta_f$  commute à  $\alpha_b$  et que  $[\alpha_a, \beta_b]$  est un élément de  $Z(G)$ . On a donc  $x_b = x_f$ . Désormais on pose  $k := [\alpha_a, \beta_b]$ ,  $k$  est un élément de  $Z(G)$ .

### 3.2.4

Les éléments  $m_a$  et  $m_c$  sont dans le centre de  $G$  (2.2.7), ils commutent avec  $\alpha_b$ . On en tire les égalités suivantes :  $\alpha_d^f = \alpha_d x_f$ ,  $\beta_{a'}^d = \beta_{a'} x_{a'}$ ,  $\beta_a^d = \beta_a x_a$ ,  $\beta_b^d = \beta_b x_f$  ainsi que l'égalité  $x_{a'} = x_f$ .

## 3.3 Quelques éléments de $\mathcal{D}(N)$ ; les conjugués de $x_a, x_f, \alpha_y, \beta_y$ ( $y \in Y$ ) par les éléments de $Y$

### 3.3.1 Les commutateurs de $\alpha_y$ et $\beta_y$ avec $x_a, x_f, \alpha_{y'}, \beta_{y'}$ ( $y, y' \in Y$ )

On établit d'abord que  $x_a$  et  $x_f$  commutent avec  $\alpha_y$  et  $\beta_y$  ( $y \in Y$ ), puis que pour  $\{y, y'\} \neq \{a, f\}$  et  $y, y' \in Y$  on a  $[\alpha_y, \alpha_{y'}] = [\beta_y, \beta_{y'}] = 1$  et que  $[\alpha_a, \alpha_f] = [\beta_a, \beta_f] = k$  ( $k$  introduit en 3.2.3). Enfin, pour  $y, y'$  dans  $Y$ , on a  $[\alpha_y, \beta_{y'}] = k$  si  $yy'$  est d'ordre 3 et  $[\alpha_y, \beta_{y'}] = 1$  si  $yy'$  est d'ordre 2.

Ces résultats s'obtiennent grâce aux relations  $Q_{222}$  et à la table des produits T.1 (3.1.3).

### 3.3.2

La table T.2 donne les expressions des conjugués de  $\alpha_y, \beta_y, x_a, x_f$  ( $y \in Y$ ) par les éléments de  $Y$ , expressions écrites comme produit de ces mêmes éléments  $\alpha_y, \beta_y, x_a, x_f$ . Presque tous ces conjugués peuvent être écrits de cette manière. Il reste  $\alpha_c^f, \beta_e^b$  et des éléments notés  $t_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ).

Comme  $\alpha_b^f = x_f \alpha_b$  (3.2.1), en conjuguant par  $c$  puis par  $e$  on obtient d'abord  $\alpha_b^f \alpha_c^f = x_f^c \alpha_b \alpha_c$ , d'où  $x_f^c = \alpha_c^f x_f x_c$  ce qui donne  $t_1$ , puis  $(\alpha_b^f)^e = x_f^e \alpha_b$ ; or  $\beta_f^b = \beta_f x_f = \beta_f \alpha_b \alpha_b^f$  (3.2.1, 3.3.1), il vient  $\beta_f^{be} = \beta_f^b \beta_e^b = \beta_f \beta_e \alpha_b \alpha_b^{fe}$  d'où  $x_f^e = \beta_e^b x_f \beta_e$  ce qui donne  $t_2$ .

Des égalités  $x_a^e = x_b^{ab.e} = x_f^{e.ab}$  et  $x_a^c = x_f^{a.f.c} = x_f^{c.af}$  on déduit, en utilisant  $t_2$  et  $t_1$  les expressions de  $t_4 = x_a^e = \beta_e^b \beta_e^{ba} x_a$  et  $t_3 = x_a^c = \alpha_c^f \alpha_c^{fa} x_f$ .

### 3.4 L'ensemble $\Gamma = \{\alpha_y, \beta_y, x_a, x_f, \alpha_c^f, \alpha_c^{fa}, \alpha_c^{fe}, \alpha_c^{fae}, \beta_e^b, \beta_e^{ba} (y \in Y)\}$ engendre $N$ ; on a $\mathcal{D}(N) = < k >$

On construit deux tables : celle, notée T.3, des conjugués  $\gamma^y (\gamma \in \Gamma, y \in Y)$  écrits en fonction des éléments de  $\Gamma$ , et celle, notée T.4, des commutateurs des éléments de  $\Gamma$ . Les éléments non connus de la table T.3 sont notés  $t_5, t_6, \dots, t_{20}$ , leurs expressions sont données dans la liste T.5.

#### 3.4.1

La table T.4 s'obtient dans presque tous les cas par des arguments simples (relations  $Q_{2,2,2}$ , tables T.1 et T.2, résultats connus de la table T.3). dans les autres cas, on montre que chaque commutateur est central dans  $N$  et dans  $G$ , qu'il est de carré 1; puis on vérifie qu'il est égal soit à 1 soit à  $k$ . En particulier on a  $k^2 = 1$  et la relation  $r = 1, (\mathcal{C}^{ee'de} \mathcal{A})^4 = 1$ , impose  $k \neq 1$ .

#### 3.4.2

En conjuguant  $x_f^c$  par  $e$  et  $x_f^e$  par  $c$  on obtient  $x_f^{ce} = (\alpha_c^f x_f \alpha_c)^e = (\beta_e^b x_f \beta_e)^c$  (3.3.2) d'où l'on déduit les expressions de  $\beta_e^{bc}$  ( $t_{17}$ ) et  $\beta_e^{bca}$  ( $t_{20}$ ).

En outre, on a  $x_a^{ca'a} = x_f^c$  puisque  $x_{a'} = x_f$  (3.2.4); on en tire les valeurs de  $\alpha_c^{faa'}$  ( $t_5$ ) et de  $\alpha_c^{faa'e}$  ( $t_{12}$ ). En écrivant  $x_a^{ea'} = x_a^e x_f^e$ , il vient l'expression de  $\beta_e^{baa'}$  ( $t_{19}$ ).

### 3.4.3

En utilisant les valeurs connues de la table T.2 on obtient par conjugaison les expressions de  $\alpha_c^{fac'}(t_7)$ ,  $\alpha_c^{fad}(t_8)$ ,  $\alpha_c^{feb}(t_9)$ ,  $\alpha_c^{fec'}(t_{10})$ ,  $\alpha_c^{faec'}(t_{14})$ ,  $\beta_e^{bd}(t_{18})$ ,  $\beta_e^{bad}(t_{21})$ .

### 3.4.4

Les éléments  $m_c$  et  $m_a$  sont dans  $Z(G)$  (2.2.7). De  $[m_c, \alpha_e] = 1$  on déduit les écritures de  $\alpha_c^{fab}(t_6)$  puis de  $\alpha_c^{fabe}(t_{13})$  et de  $[m_c, \alpha_a] = 1$  on déduit celles de  $\alpha_c^{fed}(t_{11})$  et de  $\alpha_c^{faed}(t_{15})$ .

La connaissance de  $t_6$ ,  $t_{15}$  et  $t_{20}$  permet d'écrire le conjugué de  $\beta_e^{ba}$  par  $\mathcal{C} = c^{c' bdc}$  :

$$\beta_e^{ba\mathcal{C}} = kx_a x_f \alpha_{c'} \beta_b \beta_f \beta_e^{ba}.$$

L'égalité  $[m_c, \beta_a] = 1$  conduit à une relation (S1) entre les éléments de  $\Gamma$  :

$$(S1) : \quad \alpha_b \alpha_d \alpha_f \beta_b \beta_d \beta_f = 1$$

Les expressions de  $t_6$ ,  $t_{12}$  et  $t_{13}$  conduisent à une expression du conjugué de  $\alpha_c^{fe}$  par  $\mathcal{A} = a^{a' b f a}$  :

$$\alpha_c^{fe\mathcal{A}} = k\alpha_{a'} \alpha_d \beta_{a'} \beta_d \beta_f \beta_e^{ba} x_a \alpha_c^{fe} \beta_e^{baf}.$$

La relation (S1), les égalités  $[m_a, \beta_e] = [m_a, \alpha_c] = 1$  conduisent à l'expression de  $\beta_e^{baf}(t_{22})$ . Par conjugaison de  $t_{22}$  par  $c$  et de  $t_{20}$  par  $f$  on obtient  $\beta_e^{baf.c} = \beta_e^{bac.f}$  d'où :

$$(\beta_{c'} \beta_f \beta_e x_a x_f)^c \beta_e^{bac} \beta_e^{bc} = \alpha_c^{faef} \beta_e^{baf} \alpha_c^{faf}.$$

Grâce aux expressions  $t_{20}$ ,  $t_{17}$  et  $t_{22}$  on en déduit

$$\alpha_c^{faef} = k\beta_c \alpha_c \alpha_c^{fae} \alpha_c^{fe} \alpha_c^f \alpha_c^{fa} \quad (t_{16})$$

Enfin la relation (S1) et l'égalité  $[m_a, \alpha_e] = 1$  conduisent à une seconde relation entre les éléments de  $\Gamma$  :

$$(S2) : \quad \alpha_{a'} \beta_{c'} \beta_d \beta_f = 1.$$

Les tables T.3 et T.4 sont achevées.

### 3.4.5

Le sous-groupe  $N$  est engendré par  $\Gamma$  (tables T.2, T.3) et son groupe des commutateurs  $\mathcal{D}(N)$  est engendré par l'élément  $k$  d'ordre 2 (table T.4). Les relations (S1) et (S2) prouvent qu'il y a dans  $\Gamma$  deux générateurs superflus, par exemple  $\beta_b = \alpha_b \alpha_d \alpha_f \beta_d \beta_f$  (S1) et  $\beta_{c'} = \alpha_{a'} \beta_d \beta_f$  (S2). Ainsi  $N$  est engendré par 22 involutions, l'ordre de  $N/\mathcal{D}(N)$  divise  $2^{22}$  et celui de  $N$  divise  $2^{23}$ .



### 3.4.6

On pose  $\Gamma_0 = \Gamma - \{\beta_b, \beta_{c'}\}$ . Toute relation entre les éléments de  $\Gamma_0$  s'écrit  $1 = k^{p_0} \prod_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma^{p_\gamma}$  où  $p_0$  et  $p_\gamma$  sont dans  $\{0, 1\}$ , chaque élément de  $\Gamma_0$  intervenant au plus une fois. On obtient alors :  $(\alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'})^p = 1$  et  $(\alpha_{c'}\alpha_d\alpha_f\beta_{a'})^q = 1$  avec  $p$  et  $q$  dans  $\{0, 1\}$ .

### 3.4.7

Les éléments  $m_c z_1 = m_e z'_1$ ,  $m_c z_2 = m_a z'_2$  et  $m_e z_3 = m_a z'_3$  sont respectivement des éléments centraux des sous-groupes  $K_a$ ,  $K_e$  et  $K_c$  (voir 2.2.6). Des calculs conduisent aux égalités :

$$z_1 z_2 = \alpha_{a'}\alpha_b\alpha_{c'}, \quad z'_1 z_3 = \alpha_{c'}\alpha_d\alpha_f\beta_{a'}, \quad z'_2 z'_3 = \alpha_{a'}\alpha_b\alpha_d\alpha_f\beta_{a'}.$$

On observe que les éléments  $z_1 z_2$  et  $z'_1 z_3 = m_e m_c z_1 \cdot z_3$  sont dans  $N \cap Z(G)$ ; on pose  $z_1 z_2 = z$  et  $z'_1 z_3 = \hat{z}$ , on a  $z'_2 z'_3 = z\hat{z}$ .

## 3.5 Le centre de $N$ , l'ordre de $N$

### 3.5.1

Les éléments  $m_a$ ,  $m_c$  et  $m_e$  sont centraux dans  $G$  et l'on a  $m_a m_c = n_e$ ,  $m_c m_e = n_a$ ,  $m_e m_a = n_c$  (2.2.6). Rappelons que  $m_a = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc}$  et  $n_a = a'bfd\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0^{cbdc}$  où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_0$  désignent respectivement  $a^{a'bfa}$  et  $a^{a'bfa}$  (voir 2.2.5 et 2.2.6). On établit alors l'égalité  $m_a n_a = k$  et par suite  $m_c n_c = k = m_e n_e$ .

### 3.5.2

Il résulte de 3.4.6 et 3.4.7 que les éléments  $k$ ,  $z$  et  $\hat{z}$  engendrent le centre de  $N$  et que  $Z(N)$  est contenu dans  $Z(G)$ . Ainsi on a  $|Z(N)| = 2^3$  et  $|N| = 2^{23}$ .

## 4 La preuve du théorème

Pour  $1 \leq i \leq 3$ , on considère un groupe  $G_i$  avec la présentation

$$(a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(i))$$

(notations 1.1); on note  $N_i$  la fermeture normale de  $a'a^o$  dans  $G_i$  (pour  $a^o$  voir 2.2.2) et  $H_i$  le sous-groupe de  $G_i$  engendré par  $a, b, \dots, f, a', c'$ . Pour chaque jeu de relations  $rel(i)$ , on précise la structure de  $N_i$  (4.1), celle de  $H_i$  (4.2) puis on établit que  $G_i/Z(G_i)N_i$  est isomorphe à  $U_6(2)$  (4.3). Enfin on fait le lien avec le centralisateur d'une involution de la classe  $2A$  de  ${}^2E_6(2)$ .

## 4.1 Le sous-groupe $N_i$ de $G_i$

On a établi que  $k$  (3.2.3) est une involution centrale de  $G_i$  qui engendre  $\mathcal{D}(N_i)$  et appartient à  $Z(N_i)$  (3.2.3, 3.4.1). D'après 3.4.7 et 3.5, le centre de  $N_i$  est engendré par  $k$ ,  $z = z_1 z_2$  et  $\hat{z} = z'_1 z_3$  (avec  $z'_1 = m_e m_c z_1$ ).

Sous  $rel(1)$ , on a  $z_1 = z_2 = z_3 = 1$  et  $m_a = m_e = 1$ ; comme  $m_a m_e = n_c = k m_c$  (3.5.1), il vient  $k = m_c = \hat{z}$  et  $z = 1$ . Ainsi on a  $\mathcal{D}(N_1) = Z(N_1) = \langle k \rangle$ ,  $N_1$  est un 2-groupe extrasécial. De plus l'ensemble générateur  $\Gamma_0$  (3.4.6) comporte deux éléments superflus :  $\alpha_{a'} = \alpha_b \alpha_{c'}$  ( $z = 1$ ) et  $\beta_{a'} = \alpha_{c'} \alpha_d \alpha_f k$  ( $\hat{z} k = 1$ ). Le sous-groupe  $N_1$  est engendré par 20 éléments,  $N_1$  est d'ordre  $2^{20+1}$ , c'est le produit de 10 groupes diedraux d'ordre 8 de même centre  $\langle k \rangle$  :

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_a, \alpha_f \rangle . \langle \alpha_b, \beta_a \rangle . \langle \alpha_{c'}, \beta_c \rangle . \langle \alpha_c, \beta_d \rangle . \langle \alpha_d, \beta_e \rangle . \langle \alpha_e, \beta_f \rangle . \\ & \langle \alpha_c^{fa}, \beta_e^d \rangle . \langle \alpha_c^f, \beta_e^{ba} \rangle . \langle x_f, \alpha_c^{fae} \alpha_c^f \rangle . \langle x_a, \alpha_c^{fe} \alpha_c^f \rangle . \end{aligned}$$

Sous  $rel(2)$  et  $rel(3)$ ,  $N_i$  d'ordre  $2^{23}$  (3.5.2).

## 4.2 Le sous-groupe $H_i$ de $G_i$

C'est un sous-groupe isomorphe à un quotient de  $2^2.2.U_6(2)$  (voir Annexe 4) dont le centre est  $\langle m_a, m_c \rangle . \langle m_c z_2 \rangle$  (Annexe 4 et 2.2.5); de plus  $m_a m_c = k m_e$  (2.2.6 et 3.5.1).

Sous  $rel(1)$ , on a  $z_2 = m_a = m_e = 1$  en conséquence  $m_c = k$  est l'unique involution centrale de  $H_1$  :  $H_1$  est isomorphe à  $2.U_6(2)$ .

Sous  $rel(2)$ ,  $m_c = k$  et  $z_2$  sont des involutions centrales de  $H_2$ ;  $Z(H_2)$  est d'ordre 4 et  $H_2$  est isomorphe à  $2.2.U_6(2)$ .

Sous  $rel(3)$ ,  $H_3$  est isomorphe à  $2^2.2.U_6(2)$ .

## 4.3 Le groupe $G_i$

Soit  $T_i$  le sous-groupe de  $Z(G_i)$  engendré par  $z_1, z_2, z_3, m_a, m_c, m_e$ , et soit  $\pi_i$  l'application canonique  $G_i \rightarrow G_i/T_i N_i$ . Remarquons que  $m_a m_e = k m_c$ ,  $z = z_1 z_2$  et  $\hat{z} = z'_1 z_3 = m_e m_c z_1 z_3$  sont dans  $T_i$ , donc  $Z(N_i)$  est un sous-groupe de  $T_i$  dont l'indice est 1, 2 ou  $2^3$  suivant que  $i = 1$ ,  $i = 2$  ou  $i = 3$ .

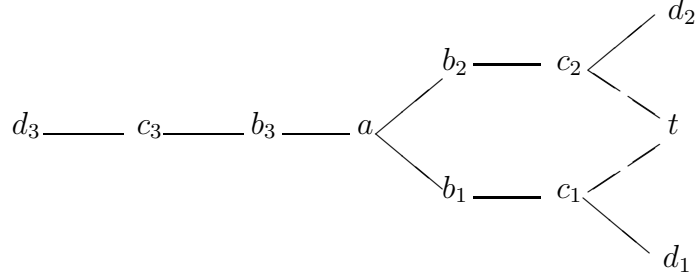
L'image de  $H_i$  par  $\pi_i$  est un sous-groupe  $U_i$  isomorphe à  $U_6(2)$  ( $Z(H_i) \subset T_i$ ) et l'image du système générateur de  $G_i$  coïncide avec celle de  $H_i$  (on a  $\pi_i(a') = \pi_i(a'')$ ). Par conséquent  $\pi_i(G_i)$  est un quotient de  $2^2.2.U_6(2)$ . Mais comme  $\pi_i(G_i) = \pi_i(H_i) = U_i$ , dans toutes les situations  $i = 1, i = 2, i = 3$ ,  $\pi_i(G_i)$  est isomorphe à  $U_6(2)$  et l'on a  $Z(G_i) = T_i$ . On en déduit les isomorphismes suivants :

$$G_1 \simeq 2^{20+1}.U_6(2), \quad G_2 \simeq 2^{24}.U_6(2), \quad G_3 \simeq 2^2.2^{24}.U_6(2).$$

#### 4.4 Fin de la preuve

Rappelons que le groupe  $E = 2^3 \cdot {}^2E_6(2)$  admet la présentation

$$(a, b_i, c_i, d_i \quad (1 \leq i \leq 3) / Q_{222}, V = 1) :$$



$$V = 1 \quad \text{avec } V = (atb_1c_2c_1b_2)^4.$$

Sous  $rel(2)$  (resp.  $rel(3)$ ) on a un morphisme  $\Phi_i$  de  $G_i$  dans le centralisateur de  $d_3$  dans  $E$  qui envoie  $z_1, z_2, z_3$  dans  $Z(E)$  (voir 2.3) ; l'image de  $G_2$  (resp.  $G_3$ ) est un sous-groupe du centralisateur de  $d_3$  dans  $E$  et l'on a  $|C_E(d_3)| = |G_2|$ . Ainsi

$$(a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(i))$$

est une présentation de  $C_E(d_3)$  pour  $i = 2$  et d'une extension  $2^2.C_E(d_3)$  pour  $i = 3$ .

Sous  $rel(1)$ , on a un morphisme de  $G_1$  dans  $\bar{E} = E/Z(E)$  qui envoie  $G_1$  dans le centralisateur  $C$  de l'image de  $d_3$  dans  $\bar{E}$  ; comme  $G_1$  et  $\mathcal{C}$  ont le même ordre,

$$(a, b, \dots, f, a', c', e' / Q_{222}, V = 1, rel(1))$$

est une présentation du centralisateur d'une involution  $d$  dans  ${}^2E_6(2)$  ( $d$  provenant de la classe  $2A$ ).

## 5 Tables.

Table des ordres des produits  $yy'_i$ ,  $y_2y'_i$ ,  $y_iy'_i$  pour  $i = 1, 2$  et  $y, y' \in Y$ .

	$a'_1$	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$c'_1$	$d_1$	$e_1$	$f_1$	$a'_2$	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$c'_2$	$d_2$	$e_2$	$f_2$
$a'$	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2
$a$	3	2	3	2	2	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	3
$b$	2	3	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	4	4	4
$c$	2	2	3	2	3	3	2	2	2	2	3	2	3	3	2	2
$c'$	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
$d$	2	2	2	3	2	2	3	4	4	4	4	3	2	2	3	2
$e$	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	3	2	3
$f$	2	3	4	4	4	4	3	2	2	3	2	2	2	2	3	2
$a'_2$	2	3	2	2	2	4	2	2	2	3	2	2	2	4	2	2
$a_2$	3	2	3	2	2	4	2	3		2	3	2	2	4	2	3
$b_2$	2	3	2	3	2	4	2	2			2	3	2	2	4	4
$c_2$	2	2	3	2	3	3	2	2				2	3	3	2	2
$c'_2$	2	2	2	3	2	2	2	2					2	2	2	2
$d_2$	2	2	4	3	2	2	3	4						2	3	2
$e_2$	2	2	4	2	2	3	2	3							2	3
$f_2$	2	3	2	4	4	4	3	2								2
$a'_1$	2	3	2	2	2	2	2	2								
$a_1$		2	3	2	2	2	2	3								
$b_1$			2	3	2	2	2	4								
$c_1$				2	3	3	2	4								
$c'_1$					2	2	2	4								
$d_1$						2	3	2								
$e_1$							2	3								
$f_1$								2								

Table T.1

Tables des conjugués  $\gamma_y^{y'}$  pour  $\gamma_y \in \{\alpha_y, \beta_y\}$ ,  $y$  et  $y' \in Y$

Table T.2 (3.3.2)

	$a'$	$a$	$b$	$c$	$c'$	$d$	$e$	$f$
$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}\alpha_a$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$	$\alpha_{a'}$
$\alpha_a$	$\alpha_a\alpha_{a'}$	$\alpha_a$	$\alpha_a\alpha_b$	$\alpha_a$	$\alpha_a$	$\alpha_a$	$\alpha_a$	$\alpha_a\beta_f$
$\alpha_b$	$\alpha_b$	$\alpha_b\alpha_a$	$\alpha_b$	$\alpha_b\alpha_c$	$\alpha_b$	$\alpha_b$	$\alpha_b$	$\alpha_b x_f$
$\alpha_c$	$\alpha_c$	$\alpha_c$	$\alpha_c\alpha_b$	$\alpha_c$	$\alpha_c\alpha_{c'}$	$\alpha_c\alpha_d$	$\alpha_c$	$\alpha_c^f$
$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}\alpha_c$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}$	$\alpha_{c'}x_f$
$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d\alpha_c$	$\alpha_d$	$\alpha_d$	$\alpha_d\alpha_e$	$\alpha_d x_f$
$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e$	$\alpha_e\alpha_d$	$\alpha_e$	$\alpha_e\alpha_f$
$\alpha_f$	$\alpha_f$	$\alpha_f\beta_a$	$\alpha_f$	$\alpha_f$	$\alpha_f$	$\alpha_f x_f$	$\alpha_f\alpha_e$	$\alpha_f$
$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}\beta_a$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}x_f$	$\beta_{a'}$	$\beta_{a'}$
$\beta_a$	$\beta_a\beta_{a'}$	$\beta_a$	$\beta_a\beta_b$	$\beta_a$	$\beta_a$	$\beta_a x_a$	$\beta_a$	$\beta_a\alpha_f$
$\beta_b$	$\beta_b$	$\beta_b\beta_a$	$\beta_b$	$\beta_b\beta_c$	$\beta_b$	$\beta_b x_f$	$\beta_b$	$\beta_b$
$\beta_c$	$\beta_c$	$\beta_c$	$\beta_c\beta_b$	$\beta_c$	$\beta_c\beta_{c'}$	$\beta_c\beta_d$	$\beta_c$	$\beta_c$
$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}\beta_c$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$	$\beta_{c'}$
$\beta_d$	$\beta_d$	$\beta_d$	$\beta_d x_f$	$\beta_d\beta_c$	$\beta_d$	$\beta_d$	$\beta_d\beta_e$	$\beta_d$
$\beta_e$	$\beta_e$	$\beta_e$	$\beta_e^b$	$\beta_e$	$\beta_e$	$\beta_e\beta_d$	$\beta_e$	$\beta_e\beta_f$
$\beta_f$	$\beta_f$	$\beta_f\alpha_a$	$\beta_f x_f$	$\beta_f$	$\beta_f$	$\beta_f$	$\beta_f\beta_e$	$\beta_f$
$x_f$	$x_f$	$x_f x_a$	$x_f$	$t_1$	$x_f$	$x_f$	$t_2$	$x_f$
$x_a$	$x_a x_f$	$x_a$	$x_a x_f$	$t_3$	$x_a$	$x_a$	$t_4$	$x_a x_f$
$\alpha_c^f$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^{fa}$	$\alpha_c^f\alpha_b x_f$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^f\alpha_{c'}x_f$	$\alpha_c^f\alpha_d x_f$	$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c$
$\alpha_c^{fa}$	$t_5$	$\alpha_c^f$	$t_6$	$\alpha_c^{fa}$	$t_7$	$t_8$	$\alpha_c^{fae}$	$\alpha_c^{fa}$
$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c^{fae}$	$t_9$	$\alpha_c^{fe}$	$t_{10}$	$t_{11}$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^{fe}$
$\alpha_c^{fae}$	$t_{12}$	$\alpha_c^{fe}$	$t_{13}$	$\alpha_c^{fae}$	$t_{14}$	$t_{15}$	$\alpha_c^{fa}$	$t_{16}$
$\beta_e^b$	$\beta_e^b$	$\beta_e^{ba}$	$\beta_e$	$t_{17}$	$\beta_e^b$	$t_{18}$	$\beta_e^b$	$\beta_e^b\beta_f x_f$
$\beta_e^{ba}$	$t_{19}$	$\beta_e^b$	$\beta_e^{ba}$	$t_{20}$	$\beta_e^{ba}$	$t_{21}$	$\beta_e^{ba}$	$t_{22}$

Table T.3 (3.4)

Table des commutateurs des éléments de  $\Gamma$  (3.4)  
Table T.4

	$\beta_{a'}$	$\beta_a$	$\beta_b$	$\beta_c$	$\beta_{c'}$	$\beta_d$	$\beta_e$	$\beta_f$	$\alpha_f$	$\alpha_c^f$	$\alpha_c^{fa}$	$\alpha_c^{fe}$	$\alpha_c^{fae}$	$\beta_e^b$	$\beta_e^{ba}$
$\alpha_{a'}$		$k$													
$\alpha_a$	$k$		$k$						$k$						
$\alpha_b$		$k$		$k$											
$\alpha_c$			$k$		$k$	$k$									
$\alpha_{c'}$				$k$											
$\alpha_d$				$k$			$k$							$k$	$k$
$\alpha_e$						$k$		$k$						$k$	$k$
$\alpha_f$							$k$								
$\beta_{a'}$															
$\beta_a$								$k$							
$\beta_b$										$k$	$k$	$k$	$k$		
$\beta_c$															
$\beta_{c'}$										$k$	$k$	$k$	$k$		
$\beta_d$										$k$	$k$	$k$	$k$		
$\beta_e$									$k$						
$\beta_f$		$k$													
$x_a$												$k$	$k$		
$x_f$													$k$		
$\alpha_c^f$			$k$		$k$	$k$									$k$
$\alpha_c^{fa}$			$k$		$k$	$k$								$k$	
$\alpha_c^{fe}$			$k$		$k$	$k$									$k$
$\alpha_c^{fae}$			$k$		$k$	$k$								$k$	
$\beta_e^b$											$k$		$k$		
$\beta_e^{ba}$										$k$		$k$			

Les valeurs non indiquées valent 1.

Valeurs des éléments  $t_i$  ( $1 \leq i \leq 22$ )

Table T.5

$t_1$	$x_f^c$	$\alpha_c \alpha_c^f x_f$	3.3.2
$t_2$	$x_f^e$	$\beta_e \beta_e^b x_f$	3.3.2
$t_3$	$x_a^c$	$\alpha_c^f \alpha_c^{fa} x_a$	3.3.2
$t_4$	$x_a^e$	$\beta_e^b \beta_e^{ba} x_a$	3.3.2
$t_5$	$\alpha_c^{faa'}$	$\alpha_c \alpha_c^f \alpha_c^{fa}$	3.4.2
$t_6$	$\alpha_c^{fab}$	$k \alpha_c \alpha_d \beta_{c'} \beta_d \beta_f \alpha_c^f \alpha_c^{fa} x_a x_f$	3.4.4
$t_7$	$\alpha_c^{fac'}$	$\alpha_{c'} \alpha_c^{fa} x_a x_f$	3.4.3
$t_8$	$\alpha_c^{fad}$	$\alpha_d \alpha_c^{fa} x_a x_f$	3.4.3
$t_9$	$\alpha_c^{feb}$	$\alpha_b \beta_e \alpha_c^{fe} \beta_e^b x_f$	3.4.3
$t_{10}$	$\alpha_c^{fec'}$	$\alpha_{c'} \beta_e \alpha_c^{fe} \beta_e^b x_f$	3.4.3
$t_{11}$	$\alpha_c^{fed}$	$\alpha_b \alpha_c \alpha_f \beta_b \beta_{c'} \beta_e \alpha_c^f \alpha_c^{fe} \beta_e^b x_f$	3.4.4
$t_{12}$	$\alpha_c^{faea'}$	$\alpha_c \alpha_c^{fe} \alpha_c^{fae}$	3.4.2
$t_{13}$	$\alpha_c^{faeb}$	$k \alpha_c \alpha_d \alpha_e \beta_{c'} \beta_d \beta_e \beta_f \alpha_c^{fe} \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.4
$t_{14}$	$\alpha_c^{faec'}$	$\alpha_{c'} \beta_e \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.3
$t_{15}$	$\alpha_c^{faed}$	$\alpha_a \alpha_b \alpha_c \alpha_f \beta_b \beta_{c'} \beta_e \alpha_c^{fa} \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.4
$t_{16}$	$\alpha_c^{faef}$	$k \alpha_c \beta_c \alpha_c^f \alpha_c^{fa} \alpha_c^{fe} \alpha_c^{fae}$	3.4.4
$t_{17}$	$\beta_e^{bc}$	$\alpha_c^f \alpha_c^{fe} \beta_e^b$	3.4.2
$t_{18}$	$\beta_e^{bd}$	$\beta_d \beta_e^b x_f$	3.4.3
$t_{19}$	$\beta_e^{baa'}$	$\beta_e \beta_e^b \beta_e^{ba}$	3.4.2
$t_{20}$	$\beta_e^{bac}$	$\alpha_c^{fa} \alpha_c^{fae} \beta_e^{ba}$	3.4.2
$t_{21}$	$\beta_e^{bad}$	$\beta_d \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.3
$t_{22}$	$\beta_e^{baf}$	$\beta_{c'} \beta_e \beta_f \beta_e^b \beta_e^{ba} x_a x_f$	3.4.4

## 6 Annexe

Tous les graphes ci-dessous sont des graphes de Coxeter.

### 6.1 Le graphe $Q_{111}$

On désigne par  $G$  le groupe  $H_{3,6} \simeq 3^5 \rtimes S_6$ .

### 6.1.1

Le groupe  $G$  admet la présentation  $(x_i(0 \leq i \leq 5)/h)$  avec  $h$  :

$$\begin{array}{c}
 x_1 \text{---} x_2 \text{---} x_3 \text{---} x_4 \text{---} x_5 \\
 \quad \diagdown \quad \diagup \\
 \quad \quad x_0
 \end{array}$$

$$(x_1^{x_2} x_0)^3 = 1$$

L'élément  $z = (x_1 x_0)(x_1 x_0)^{x_2}(x_1 x_0)^{x_2 x_3}(x_1 x_0)^{x_2 x_3 x_4}(x_1 x_0)^{x_2 x_3 x_4 x_5}$  qui s'écrit aussi  $(x_2 x_1 x_3 x_4 x_5 x_0)^5$  est d'ordre 3 et engendre le centre de  $G$ .

### 6.1.2

Posons  $a = x_1^{x_2}$ ,  $b = x_3$ ,  $c = x_4$ ,  $d = x_5$ ,  $e = x_2^{x_3 x_4 x_5}$ ,  $f = x_0$  ; alors  $a, b, c, d, e, f$  engendrent  $G$  et satisfont à :

$$\begin{array}{c}
 Q_{111} \qquad \begin{array}{ccccc}
 & b & \text{---} & a & \\
 & \diagdown & & \diagup & \\
 c & & & & f \\
 & \diagup & & \diagdown & \\
 & d & \text{---} & e &
 \end{array}
 \end{array}$$

$$(f \cdot a^{bcde})^3 = 1$$

on a la relation  $(adbef)^4 = z \cdot (f^{ed} \cdot a^{bc})^3$ .

### 6.1.3

Le groupe  $G/Z(G)$ , noté aussi  $H_{3,6}^*$  admet la présentation

$$(a, b, \dots, f/Q_{111}, V = 1)$$

où  $V = 1$  est la relation hexagonale avec  $V = (adbef)^4$ .  
([8], [13], [15], [18]).



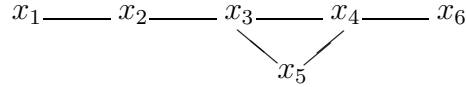
## 6.2 Le graphe $Q_{211}$

On désigne par  $G$  le groupe  $G^+(6, 3)$  (noté  $2.O_6^-(3) : 2$  dans l'ATLAS) et par  $\tilde{G}$  l'extension centrale non scindée

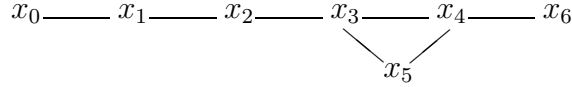
$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \rightarrow 1.$$

### 6.2.1

Le groupe  $\tilde{G}$  admet la présentation  $(x_i (1 \leq i \leq 6) / g_6, (x_3^{x_4} x_5)^3 = 1)$  avec  $g_6 :$



Il existe un unique élément  $x_0$  tel que :

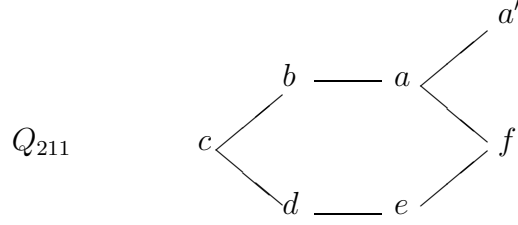


On a :  $x_0 = x_1^{x x' x_2 x_1}$ ,  $x = x_3^{x_4 x_2 x_5 x_6 x_3 x_4 x_3}$ ,  $x' = x_3^{x x_2 x_5 x_3}$ . Le centre de  $\tilde{G}$  est d'ordre 6,  $Z(\tilde{G}) = \langle m, z \rangle$ . L'élément  $z$ , d'ordre 3, engendre le centre du sous-groupe  $\langle x_i (0 \leq i \leq 5) \rangle$  isomorphe à  $H_{3,6}$  (voir l'Annexe 1). L'élément  $m$  (produit de six involutions commutant deux à deux) est d'ordre 2 et engendre le centre du sous-groupe  $\langle x_3^{x_4}, x_i (0 \leq i \leq 6, i \neq 3, 4) \rangle$  isomorphe à  $W(D_6)$ . On a

$$m = x_2 x_5 x_6 x x' x_0 = (x_3^{x_4} x_6 x_5 x_2 x_1 x_0)^5.$$

### 6.2.2

Posons  $a = x_3^{x_4}$ ,  $b = x_2$ ,  $c = x_1$ ,  $d = x_0$ ,  $e = x_3^{x_2x_1x_0}$ ,  $f = x_5$ ,  $a' = x_6$ . Alors les éléments  $a, b, \dots, f, a'$  engendrent  $\tilde{G}$  et satisfont à



### 6.2.3

Le groupe  $G$  ( $G \simeq G^+(6, 3)$ ) admet la présentation :

$$G = (a, b, \dots, f, a' / Q_{211}, V = 1)$$

où  $V = 1$  est la relation hexagonale ( $V = (adbecf)^4$ ) ; le centre de  $G$  est engendré par l'involution  $m$ ,  $m$  est l'involution centrale de tout sous-groupe isomorphe à  $W(D_6)$  engendré par des conjugués de  $a$  dans  $G$ . Posons  $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$  ; on a les égalités suivantes :

$$m = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{cbdc} = (aa'bfgcd)^5 = a'bfd\mathcal{A}\mathcal{A}^{edfe} = (aa'bfeed)^5$$

([2], [8], [13], [15], [18]).

## 6.3 Le graphe $Y_{321}$

On désigne par  $G$  le groupe de Coxeter  $W(E_7)$  ( $\simeq 2 \times Sp_6(2) \simeq 2 \times O_7(2)$ )

### 6.3.1

Le groupe  $G$  admet la présentation  $(a, b, \dots, e, c', e' / Y_{321})$  avec :

$$Y_{321} \quad c' \text{ --- } c \begin{cases} \nearrow b \text{ --- } a \text{ --- } (a^o) \\ \searrow d \text{ --- } e \text{ --- } e' \end{cases} \quad ;$$

il existe dans  $G$  un unique élément  $a^o$  qui complète le diagramme ;  $a^o$  s'écrit :  
 $a^o = \mathcal{C}^{abedcc'e'edcba}$  avec  $\mathcal{C} = c'^{bdc}$ .

### 6.3.2

Le centre de  $G$  est engendré par une involution  $z_1$  (produit de sept éléments d'ordre 2 commutant deux à deux) ; on a :

$$z_1 = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{ee'de}e'a^o = c'bd\mathcal{C}\mathcal{C}^{aa^oba}e'a^o = (cc'bdeae')^9 = (cc'bdeaa^o)^9$$

### 6.3.3

(Avec les notations ci-dessus). Le groupe  $\tilde{G}$  avec la présentation

$$(a, b, \dots, e, a', c', e' / Y_{331}, [z_1, a'] = 1)$$

$$Y_{331} \quad c' \text{ --- } c \begin{cases} \nearrow b \text{ --- } a \text{ --- } a' \\ \searrow d \text{ --- } e \text{ --- } e' \end{cases}$$

est isomorphe à  $A \rtimes W(E_7)$ , où  $A$  est un 2-groupe abélien élémentaire d'ordre  $2^7$  engendré par les conjugués de  $a^oa'$  ; le centre de  $\tilde{G}$  est engendré par  $z_1$  et

$z_2$  ( $z_2$  désignant l'involution centrale du sous-groupe  $\langle a, b, \dots, e, a', c' \rangle$ ),  $z_2 = (cc'bdaea')^9$ . Le produit  $z_1 z_2$  est dans  $A$  et les relations  $[z_1, a'] = 1$  et  $(a^o a')^2 = 1$  sont équivalentes.

([1], [2], [3], [5], [7], [14], [16], [19])

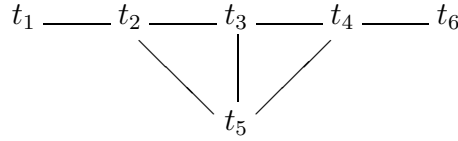
## 6.4 Le graphe $Q_{221}$

On désigne par  $U$  le groupe simple  $U_6(2)$  ( $\simeq {}^2A_5(2)$ ), son multiplicateur de Schur est  $2^2 \times 3$ . Les éléments  $t_i$  qui interviennent dans cette section sont des transvections unitaires et n'ont pas de lien avec les  $t_i$  introduits section 3.

### 6.4.1

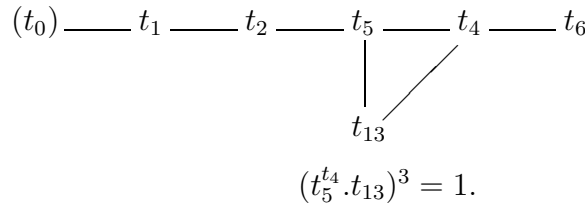
Le groupe  $\hat{K}$  isomorphe à  $(2^2 \times 3).2 \times U$  admet la présentation

$$(t_i (1 \leq i \leq 6 / \underline{u}, (t_{13} t_6)^2 = 1) \quad \text{avec} \quad \underline{u} :$$



$$(t_3^{t_2} t_5)^3 = (t_3^{t_4} t_5)^3 = (t_3^{t_2 t_4} t_5)^3 = 1,$$

où  $t_{13} = t_1^{t' t'' t_3 t_4}$  ( $t' = t_4^{t_3 t_5 t_2 t_3 t_5}$ ,  $t'' = t_2^{t_3 t_5 t_4 t_3 t_5}$ ). Les éléments  $t_i$  correspondent aux transvections unitaires  $t_{v_i}$ , les  $v_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) forment une base de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_4$  associé et satisfont à  $(v_i, v_j) = 0$  si  $(t_i t_j)^2 = 1$ ,  $(v_i, v_j) = 1$  si  $(t_i t_j)^3 = 1$ , sauf pour  $\{i, j\} = \{3, 5\}$ , où on a alors  $(v_5, v_3) = \omega$  avec  $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$ . L'élément  $t_{13}$  correspond à la transvection  $t_{v_1+v_3}$  et satisfait aux relations :

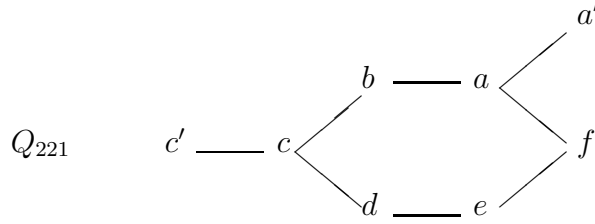


$$(t_5^{t_4} . t_{13})^3 = 1.$$

Le sous-groupe  $T = \langle t_{13}, t_i (1 \leq i \leq 6, i \neq 3) \rangle$  est isomorphe à un quotient du groupe  $\tilde{G}$  (voir Annexe 2), son centre contient un élément d'ordre 3, central dans  $\hat{K}$ .

### 6.4.2

Il existe des conjugués de  $t_1$  dans  $\hat{K}$  :  $a, b, \dots, f, a', c'$  tels que :



On a la correspondance :

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow t_{v_4+v_5}, b \longrightarrow t_{v_2}, c \longrightarrow t_{v_1}, d \longrightarrow t_{v_2+\omega(v_1+v_3)+\omega v_6}, \\ e &\longrightarrow t_{\omega^2 v_1+\omega(v_1+v_6)+v_5}, f \longrightarrow t_{v_1+v_3}, a' \longrightarrow t_{v_6}, c' \longrightarrow t_{v_2+v_6}. \end{aligned}$$

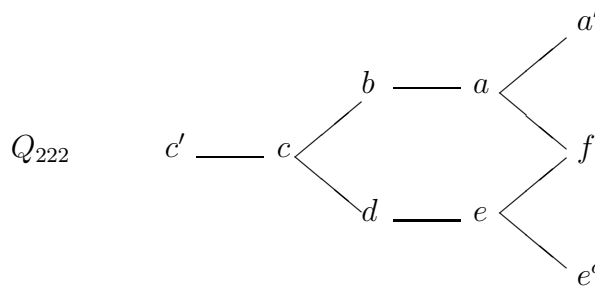
### 6.4.3

Le groupe  $K$  (isomorphe à  $2^2.2.U$ ) admet la présentation

$$(a, b, \dots, f, a', c' / Q_{221}, V = 1)$$

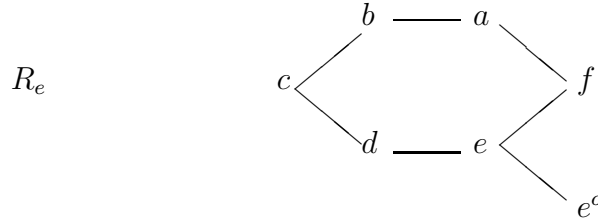
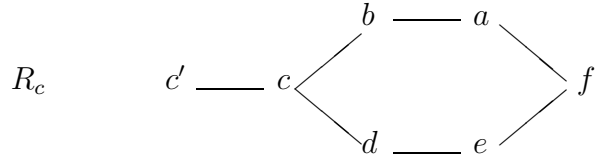
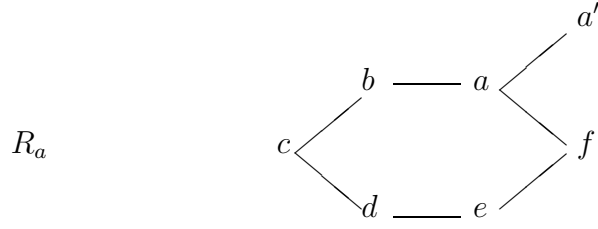
où  $V = 1$  désigne la relation hexagonale  $V = (adbecf)^4$ .

a) Il existe un unique élément  $e^o$  satisfaisant aux relations :



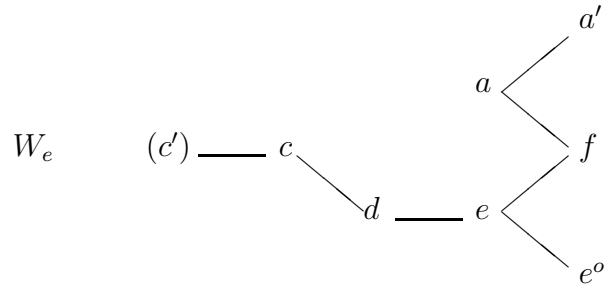
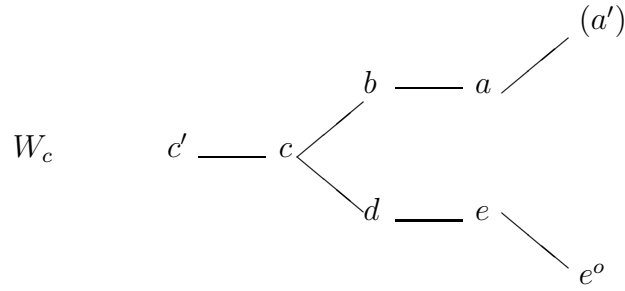
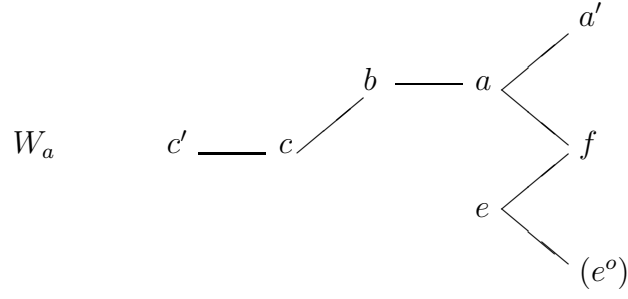
cet élément s'écrit  $e^o = \mathcal{C}^{abedcc'}a'abcde = \mathcal{A}^{cbadaa'}c'cbafe$  (avec  $\mathcal{A} = a^{a'bfa}$  et  $\mathcal{C} = c^{c'bdc}$ )  
et correspond à la transvection  $t_{v_1+v_3+\omega v_6}$ .

b) Les sous-groupes  $R_a$ ,  $R_c$  et  $R_e$  définis à partir des graphes :



sont isomorphes au groupe orthogonal  $2.O_6^-(3) : 2$  (voir Annexe 2) ; leurs images dans  $U$  sont les représentants des trois classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à  $O_6^-(3) : 2$  . Leurs involutions centrales  $\mu_a, \mu_c, \mu_e$  appartiennent au multiplicateur de Schur de  $U$ , on a  $\mu_a\mu_c\mu_e = 1$ ,  $\mu_a = (aa'fbcd)^5$ ,  $\mu_c = (cc'dbaf)^5$  et  $\mu_e = (ee^odfab)^5$ .

c) Les sous-groupes  $W_a$ ,  $W_c$  et  $W_e$  définis à partir des graphes :



contiennent respectivement  $e^o, a'$  et  $c'$  ; ils sont isomorphes à  $W(E_7)$ , leurs involutions centrales  $z_a$ ,  $z_c$  et  $z_e$  sont dans  $Z(K)$ .

On a  $\mu_a z_a = \mu_c z_c = \mu_e z_e = q$  où  $q$  correspond au produit des cinq transvections d'un plan isotrope. On a  $Z(K) = \langle \mu_a, \mu_c \rangle \cdot \langle \mu_a z_a \rangle$ .  
([2], [4], [13], [14],[15], [17], [20]).

## Références

- [1] Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie*. Masson, 1981.
- [2] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., and Wilson R.A. *Atlas of Finite Groups*. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [3] Conway J.H., Norton S.P., and Soicher L.H. The Bimonster, the group  $Y_{555}$  and the projective plane of order 3. In Tagora M., editor, *Computers in Algebra*. Marcel Dekker, 1988.
- [4] Cuypers H. and Hall J.I. 3-transposition groups of orthogonal type. *Journal of Algebra*, 152 :342–373, 1992.
- [5] Cuypers H. and Hall J.I. The 3-transposition groups with trivial center. *Journal of Algebra*, 178 :149–193, 1995.
- [6] Griess R.L., Meierfrankenfeld U., and Segev Y. A uniqueness proof for the Monster. *Annals of Math.*, 130 :567–602, 1989.
- [7] Hall J.I. Some 3-transposition groups with normal 2-subgroups. *Proc. London Math. Soc.*, 358 :112–136, 1989.
- [8] Hall J.I. 3-transposition groups with non-central normal 2-subgroups. *Journal of Algebra*, 146 :49–76, 1992.
- [9] Ivanov A.A. Presenting the Baby Monster. *Journal of Algebra*, 163 :88–108, 1994.
- [10] Jansen Ch., Lux K., Parker R.A., and Wilson R.A. *An Atlas of Brauer characters*, volume New Series II. London Math. Soc. Monographs (Oxford), 1995.
- [11] Soicher L.H. More on the group  $Y_{555}$  and the projective plane of order 3. *Journal of Algebra*, 136 :168–174, 1991.
- [12] Stroth G. Eine Kennzeichnung der Gruppe  ${}^2E_6(2)$ . *Journal of Algebra*, 35 :534–547, 1975.
- [13] Virotte-Ducharme M.M. *Couples fischeriens presque simples*. PhD thesis, Paris 7, 1985.
- [14] Virotte-Ducharme M.M. Présentation des groupes de Fischer 1. *Geom. Dedicata*, 41 :275–335, 1992.
- [15] Virotte-Ducharme M.M. Présentation de certains couples fischeriens de type classique. *Bull. Soc. Math. France*, 121 :227–270, 1993.
- [16] Virotte-Ducharme M.M. Some Y-groups. *Geom. Dedicata*, 65 :1–30, 1997.
- [17] Virotte-Ducharme M.M. Sur certaines extensions de  $SU(n, 4)$ . *Bull. Soc. Math. France*, 129 :1–31, 2001.



- [18] Zara F. *Classification des couples fischeriens*. PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne Amiens, 1985.
- [19] Zara F. Actions of reflection groups on nilpotents groups. *Europ. J. of Combinatorics*, 18 :231–242, 1997.
- [20] Zara F. Présentations des groupes de Fischer  $D_4(2) : S_3$  et  $D_4(3) : S_3$ . *Journal of Algebra*, 170 :705–734, 1994.